Пояснення до завдань з математики пробного тестування «ЗІГЗАГ»-2014

1. **А.** *Пояснення:* якщо 25 уроків – це 100%, то було відзнято 120%, тобто 30 уроків (пропорція: $25\ - 100\%; x - 120\%$). Тепер вже 30 уроків – це 100%, а на сайт виклали 80%. Складаючи аналогічну пропорцію отримуємо, що виклали 24 уроки. Тепер залишається скласти пропорцію: 25 уроків (завдання) – це 100%, а 24 викладених – це $x\%$. Звідси знаходимо, що $x = 96\%$.
2. **В.** *Пояснення:* на рисунку зображено два подібних прямокутних трикутника (вертикальні кути рівні). Коефіцієнт подібності 2 ($8a: 4a = 2$). Користуючись цим фактом неважко знайти, що інші катети цих трикутників дорівнюють вже $6a$ і $3a$. Користуючись теоремою Піфагора, отримуємо відстань від дому до офісу: $10a + 5a = 15a$. Довжина маршруту $- 21a$. Залишається поділити.
3. **Б.** *Пояснення:* один з найпростіших способів розв'язання: $9^{\log_8 2} = 9^{\log_{2^3} 2} = 9^{\frac{1}{3}\log_2 2} = 9^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[6]{25} = \sqrt[6]{5^2} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}}$. Далі порівняти вирази вже неважко.
4. **Д.** *Пояснення:* це задача на арифметичну прогресію. В цій прогресії: $a_1 = 3, d = 2, a_n = 15$. За умовою необхідно знайти n. Для цього знадобиться формула: $a_n = a_1 + (n-1)d$.
5. **Д.** *Пояснення:* $\frac{a}{a^2-4a+4} - \frac{a+4}{a^2-4} = \frac{a^{(a+2}}{(a-2)^2} - \frac{a+4^{(a-2}}{(a-2)(a+2)} = \frac{a^2+2a-(a^2+2a-8)}{(a-2)^2(a+2)} = \frac{8}{(a-2)^2(a+2)}$. $\frac{8}{(a-2)^2(a+2)} : \frac{4}{(a-2)^2} = \frac{8}{(a-2)^2(a+2)} \cdot \frac{(a-2)^2}{4} = \frac{2}{a+2}$.
6. **Б.** *Пояснення:* скористаємось формулою для синуса подвійного кута: $\sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 1$. Або: $\sin(2x + \pi) = 1$. Завдяки формулам зведення отримуємо, що: $-\sin(2x) = 1 \Rightarrow \sin(2x) = -1 \Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$. На вказаному проміжку лежать лише корені $-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}$.
7. **В.** *Пояснення:* розглянемо похідну (щоб спростити обчислення, варто розкрити дужки): $y' = (x^2 - 4x + 2)' = 2x - 4$. Графік цієї функції – пряма, що проходить через точку (0; -4).
8. **В.** *Пояснення:* А) якщо скласти всі значення діаграми отримаємо 29 – **невірне твердження**; Б) по п'ятницях Оля пропустила 8 занять, всього за місяць – 29. 8 від 29 – це більше за 25% – **невірне твердження**; В) **вірне твердження**; Г) по п'ятницях Оля пропустила 8 занять, а по вівторках і середах $5 + 4 = 9$ занять – **невірне твердження**; Д) по суботах Оля пропустила всього 2 заняття, а субот в квітні не менше 4 – **невірне твердження**.
9. **Б.** *Пояснення:* це нерівність, яка розв'язується за допомогою методу інтервалів. Для цього переносимо всі доданки до лівої частини нерівності і приводимо їх до спільного знаменника: $\frac{1^{(x+1}}{x-1} - \frac{1^{(x-1}}{x+1} \le 0 \Rightarrow \frac{x+1-x+1}{(x-1)(x+1)} \le 0 \Rightarrow \frac{2}{(x-1)(x+1)} \le 0$. Після цього потрібно намалювати «змійку», нанести на неї точки -1 та 1 (виколоті через те, що вони є нулями знаменника) та заштрихувати відповідний проміжок (в даній нерівності – із знаком «$-$»). У розв'язок $(-1; 1)$ входить лише одне ціле число – 0.
10. **Б.** *Пояснення:* об'єм циліндру: $V = \pi R^2 h = 72\pi \Rightarrow R^2 h = 72$. Площа осьового перерізу: $2Rh = 48 \Rightarrow Rh = 24$. Поділивши першу рівність на другу, легко зрозуміти, що $R = 3, d = 2R = 6$.
11. **А.** *Пояснення:* знак коефіцієнта c визначається за точкою перетину з віссю Оу ($y(0) =$ с. Гілки параболи направлені вгору, а отже, старший коефіцієнт додатній. Оскільки абсциса вершини параболи дорівнює 0, а формула $x_в = -\frac{b}{2a}$, легко зрозуміти, що $b = 0$.
12. **Г.** *Пояснення:* помножимо обидві частини нерівності на 12, отримаємо: $4x - 4 + 6x + 3 \le 2x - 0$. $x \le -\frac{9}{8}$. Найбільше ціле число, що задовольняє цій умові: -2.

13. А. *Пояснення:* необхідно провести радіуси до точок дотику: OC, OD. В чотирикутнику $CBDO$ два кути прямі (радіуси, проведені до точок дотику, перпендикулярні дотичним), а кут $\angle COD$ дорівнює $120°$, бо він є центральним та опирається на ту саму дугу, що і вписаний кут, який дорівнює $60°$. Знаючи, що сума кутів чотирикутника дорівнює $360°$, можна знайти шуканий кут.

14. Д. *Пояснення:* необхідно виписати координати векторів: $\overrightarrow{AB} = (1-1; 3-1) = (0; 2), \overrightarrow{CD} = (6-3; 1-2) = (3; -1)$. Тоді скалярний добуток дорівнює $0 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = -2$.

15. Г. *Пояснення:* в даному випадку ОДЗ функції складається з двох частин: $\begin{cases} x^2 - 5x \geq 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases}$. Або: $\begin{cases} x(x-5) \geq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 5 \\ x \leq 0 \end{array}\right. \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$. Звідси $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0] \cup [5; +\infty)$.

16. Г. *Пояснення:* твердження **А** невірне (вершина піраміди проектується в центр описаного кола лише тоді, коли бічні ребра піраміди рівні (нахилені до площини основи під однаковими кутами)). Твердження **Б** також невірне – в n-кутній призмі n-бічних граней та дві грані основ, отже, $(n+2)$ грані. Твердження **В** – невірне. У формулу для об'єму конусу радіус входить в квадраті, а отже, його збільшення в 2 рази призведе до збільшення об'єму в чотири рази, тобто загальний об'єм конусу збільшиться в 2 рази. Твердження **Г** – вірне. Твердження **Д** – невірне, адже за означенням правильної піраміди в її основі лежить правильний многокутник, а бічні ребра рівні. З цього випливає лише те, що всі двогранні кути при основі рівні, але можуть мати різні значення.

17. А. *Пояснення:* винесемо 9^x за дужки: $9^{x+1,5} - 9^x = 9^x(9^{1,5} - 1) = 9^x(3^{2 \cdot 1,5} - 1) = 9^x(27-1) = 78 \Rightarrow 9^x = 3 \Rightarrow x = 0,5$.

18. Б. *Пояснення:* якщо у прямокутну трапецію вписане коло, то її менша бічна сторона та висота дорівнюють діаметру цього кола, тобто 6 см. Якщо тепер розглянути прямокутний трикутник, утворений висотою та більшою бічною стороною, легко за допомогою значення синуса знайти більшу бічну сторону: $\frac{h}{a} = 0,6 \Rightarrow a = 10$ см. Тепер залишилось згадати, що у будь-якого описаного чотирикутника суми довжин протилежних сторін рівні. Звідси сума основ трапеції дорівнює 16 см.

19. В. *Пояснення:* площа поверхні сфери обчислюється за формулою $S = 4\pi R^2 = 576\pi$. Оскільки п'ятикутників 32, то легко знайти площу одного з них – поділити площу поверхні сфери на 32.

20. А. *Пояснення:* швидкість – це похідна від шляху, тобто: $v(t) = s' \Rightarrow s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$. Але геометричний зміст визначеного інтегралу – це площа під графіком. Отже, щоб знайти пройдений шлях, достатньо обчислити площу під поданим графіком. Це трикутник із основою 8 та висотою 4.

21. 1 – Д, 2 – В, 3 – Г, 4 – Б. *Пояснення:*

1 $100^{\frac{1}{3}lg\,27 - lg\,5} = 100^{\frac{1}{3}lg\,3^3 - lg\,5} = 100^{\frac{3}{3}lg\,3 - lg\,5} = 100^{lg\,3 - lg\,5} = 100^{lg\frac{3}{5}} = 10^{2lg\frac{3}{5}} = \frac{9}{25} = 0,36$.

2 $625^{-2,25} \cdot 25^{-\frac{2}{3}} \cdot 125^{\frac{25}{9}} = (5^4)^{-2,25} \cdot (5^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (5^3)^{\frac{25}{9}} = 5^{-9-\frac{4}{3}+\frac{25}{3}} = 5^{-2} = \frac{1}{25} = 0,04$.

3 $\left(\frac{sin\,128° cos\,68° - cos\,128° sin\,68°}{cos\,44° cos\,16° - sin\,44° sin\,16°}\right)^2 = \left(\frac{\sin(128° - 68°)}{\cos(44° + 16°)}\right)^2 = \left(\frac{\sin(60°)}{\cos(60°)}\right)^2 = tg^2 60° = 3$.

4 $\frac{\sqrt[6]{5 \cdot \sqrt[7]{5^5}}}{\sqrt[7]{25}} = \frac{\sqrt[6]{5 \cdot 5^{\frac{5}{7}}}}{\sqrt[7]{5^2}} = \frac{\sqrt[6]{5^{\frac{12}{7}}}}{5^{\frac{2}{7}}} = \frac{5^{\frac{12}{7 \cdot 6}}}{5^{\frac{2}{7}}} = \frac{5^{\frac{2}{7}}}{5^{\frac{2}{7}}} = 1$.

22. 1 – Б, 2 – Г, 3 – В, 4 – Д. *Пояснення:*

1 якщо косинус кута дорівнює 0,6, то абсциса відповідної точки дорівнює 0,6. Враховуючи рівняння кола: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 0{,}8$. Оскільки точка лежить в першій чверті, ордината точки повинна бути додатною; **2** якщо точка симетрична іншій відносно осі ординат, то її ордината не змінюється, а абсциса змінює знак на протилежний; **3** якщо точка симетрична іншій відносно осі абсцис, то її абсциса не змінюється, а ордината змінює знак на протилежний; **4** якщо точка симетрична іншій відносно початку координат, то обидві її координати змінюють знак на протилежний.

23. **1 – Б, 2 – В, 3 – Д, 4 – А.** *Пояснення:* графік парної функції симетричне відносно осі Oy; функція монотонно зростає, якщо зі збільшенням змінної зростає і значення функції, тобто при русі зліва направо ми рухаємось вздовж графіка лише вгору; на рисунку 2 зображено графік показникової функції з основою, яка менша за 1; якщо значення функції в точці 0 дорівнює 0, то функція повинна проходити через точку (0;0).

24. **1 – А, 2 – Б, 3 – Г, 4 – Д.** *Пояснення:* висота рівностороннього трикутника обчислюється за формулою: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 4$. Знаючи сторону трикутника, знайти інші величини нескладно, для цього знадобляться формули: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; R = \frac{a\sqrt{3}}{3};\ r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

25. **25.1. 6. 25.2. 18.** *Пояснення:* 1) якщо позначити через x – кількість огірків, то кількість помідорів повинна бути $2x$. Отже, враховуючи ціни на продукти з таблиці, загальна вартість покупки складатиме $13x$, і ця величина не повинна перевищувати 50 грн. Залишається зауважити, що x – це ціла величина. 2) 2 літри молока та 2 батона хліба коштують 22 грн. Отже, на покупку картоплі залишається 28 грн. Враховуючи, що одна картоплина коштує 1,5 грн., на цю суму можна купити не більше 18 картоплин.

26. **26.1. $\mathbf{0{,}96}$. 26.2. $\mathbf{-13{,}44}$.** *Пояснення:* 1) легко виразити тангенс кута: $tg\alpha = -\frac{7}{24}$, а далі легко скористатися однією з основних тригонометричних тотожностей: $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$. Звідси: $cos^2\alpha = \frac{576}{625} \Rightarrow |cos\alpha| = \frac{24}{25} = 0{,}96$. 2) Знаючи модуль косинус кута легко знайти модуль синуса кута, знаючи, що сума їх квадратів дорівнює 1. Отримаємо: $|sin\alpha| = \frac{7}{25}$. Тепер можна знайти синус подвійного кута, якщо зауважити, що: $sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$. Щоб визначити знак синусу подвійного кута треба згадати, що котангенс – це відношення косинусу до синусу. Якщо котангенс від'ємний, то знаки синуса та косинуса різні, а отже, синус подвійного кута буде від'ємним.

27. $\mathbf{0{,}09}$. *Пояснення:* усього в Олексія 4^4 варіанти, оскільки він може проводжати в кожен з чотирьох днів будь-яку з 4 дівчат. З них сприятливих (тобто тих, в яких він проведе чотирьох різних) $P_4 = 4! = 24$. Залишається поділити: $p = \frac{24}{256} = \frac{3}{32} \approx 0{,}09$.

28. **7.** *Пояснення:* спочатку треба знайти ОДЗ цієї системи: $\begin{cases} x - 6 > 0 \\ x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 6$. Далі розв'язуємо кожну з нерівностей окремо: $\begin{cases} x - 6 \le 2 \\ x^2 \le 7x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 8 \\ x(x-7) \le 0 \end{cases}$. Розв'язуючи другу нерівність методом інтервалів, знаходимо загальний розв'язок системи: $[0; 7]$. Ураховуючи ОДЗ: $(6; 7]$. Цьому проміжку належить єдиний цілий розв'язок: 7.

29. $\mathbf{-8}$. *Пояснення:* за графіком можна визначити рівняння цієї дотичної: $y = x - 1$. Ми знаємо, що похідна у точці дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної через цю точку. Отже, похідна у деякій точці функції повинна дорівнювати 1 (кутовий коефіцієнт цієї дотичної). Запишемо цю рівність: $2ax_0 +$

$a + 1 = 1 \Rightarrow a(2x_0 + 1) = 0$. Треба розглянути два випадки: $a = 0$ – не підходить, адже графік функції буде прямою, яка не співпадає з дотичною. Отже, ця дотична проведена до функції у точці з абсцисою $x_0 = -\frac{1}{2}$. Тепер знайти значення параметру нескладно. Якщо дотична проведена в точці з цією абсцисою, то графік функції проходить через точку $(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$, адже ця точка є спільною для дотичної і графіка функції. Підставивши ці координати в рівняння функції, отримаємо значення параметру.

30. 0,7. *Пояснення:* $\left(\frac{b^{-\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{7}{18}}} \cdot \frac{b^{\frac{2}{7}}}{b^{-\frac{5}{7}}}\right)^9 = \left(\frac{b^{-\frac{5}{6}+\frac{2}{6}}}{b^{\frac{7}{18}}} \cdot \frac{b^{\frac{2}{7}-(-\frac{5}{7})}}{1}\right)^9 = \left(\frac{b^{-\frac{3}{6}-\frac{7}{18}}}{1} \cdot b\right)^9 = \left(b^{-\frac{16}{18}} \cdot b\right)^9 = \left(b^{\frac{2}{18}}\right)^9 = b$.

31. 67. *Пояснення:* розглянемо ромб ABCD, у якому проведена висота AH до сторони BC. Тоді в прямокутному трикутнику AHC можна за теоремою Піфагора знайти невідомий катет: $HC = 6$ см. Тоді, якщо позначити $BH = x$, то $AB = 6 + x$, і можна записати теорему Піфагора для трикутника ABH. З неї можна знайти $x = 2\frac{1}{3}$ см, а сторона ромба дорівнюватиме: $8\frac{1}{3}$ см. Знаючи висоту та сторону ромба, знаходимо площу й округляємо її до цілих.

32. 96. *Пояснення:* розглянемо піраміду $SABCD$ з висотою SH та апофемою SK. Оскільки піраміда правильна, то центр вписаної сфери належить її висоті. Позначимо його O. Тепер розглянемо трикутник HSK. У ньому кут $\angle SKH = 60°$, як двогранний кут при основі. Тоді $\angle KSH = 30°$. З точки O опустимо перпендикуляр на гіпотенузу трикутника (OM). Неважко довести, що $\mathrm{OM} = \mathrm{OH} = 2$ см, як радіуси вписаної сфери. Тоді $SO = 2OM = 4$см, а висота піраміди дорівнює 6 см. З прямокутного трикутника, який ми розглядаємо, неважко знайти інший катет $HK = 2\sqrt{3}$ см – він дорівнює половині сторони основи. Знаючи сторону основи та висоту правильної піраміди можна знайти її об'єм.

33. 0. *Пояснення:* випишемо ОДЗ правої частини цього рівняння: $x > -2a$. Після цього скористаємось основною логарифмічною тотожністю та перетворимо праву частину рівняння: $\sqrt{x^2 + 2ax - (a + 0{,}75)} = \sqrt{x + 2a}$. Тепер можемо піднести обидві частини рівняння у квадрат. Отримаємо: $x^2 + (2a - 1)x - (3a + 0{,}75) = 0$. Дискримінант цього рівняння: $D = 4a^2 + 8a + 4 = (2(a + 1))^2$. Розглянемо два випадки: якщо $a = -1$: $x = -1{,}5$ – не задовольняє ОДЗ правої частини. Отже, в цьому випадку коренів немає, а нам потрібні значення параметру, при яких рівняння має рівно один корінь. Отже, розглядаємо випадок $a \neq -1$. Тоді знаходимо корені квадратного рівняння: $x_1 = -2a - 0{,}5$; $x_2 = 1{,}5$. Очевидно, що перший корінь завжди не задовольняє ОДЗ правої частини $(x > -2a)$. Тому коренем може бути лише число 1,5. Оскільки рівняння повинно мати корінь, то для того, щоб 1,5 було коренем рівняння, необхідно і достатньо, щоб: $1{,}5 > -2a \Rightarrow a > -0{,}75$. Найменше ціле таке значення параметру – це 0.

34. 16. *Пояснення:* оскільки підінтегральний вираз є парною функцією, то можна скористатися такою властивістю визначеного інтеграла: $\int_{-4}^{4} \left|x^2 - 2|x|\right| dx = 2\int_0^4 |x^2 - 2x| dx$. Якщо тепер побудувати графік підінтегральної функції, то нескладно побачити, що за геометричною властивістю визначеного інтеграла: $2\int_0^4 |x^2 - 2x| dx = 2\int_0^2 (-x^2 + 2x) dx + 2\int_2^4 (x^2 - 2x) dx = 2(-\frac{x^3}{3} + x^2)\Big|_0^2 + 2(\frac{x^3}{3} - x^2)\Big|_2^4 = -\frac{16}{3} + 8 + \frac{128}{3} - 32 - \frac{16}{3} + 8 = 16$.