Пояснення до завдань з МАТЕМАТИКИ пробного тестування «ЗІГЗАГ»-2012-2013

1. **А.** *Пояснення:* після того, як об'єм м'язів збільшився на 30%, він став складати 130% від початкового. Якщо тепер він зменшився на 20%, то пропорція виглядатиме наступним чином: $100\% - 130\%$, а $80\% - x\%$.
2. **Д.** *Пояснення:* потрібно намалювати рисунок, з якого стане зрозуміло, що задача розв'язується в один крок за допомогою наступного факту: катет, що лежить напроти кута 30^0, в 2 рази менший за гіпотенузу. В даному випадку міст – це гіпотенуза, а ширина річки – катет.
3. **Б.** *Пояснення:* можна розв'язувати задачу декількома способами. Наведемо найпростіший: $3\sqrt{6} = \sqrt{3^2 \cdot 6} = \sqrt{54}$, $\sqrt[4]{3600} = \sqrt[4]{60^2} = \sqrt{60}$.
4. **Г.** *Пояснення:* це задача на арифметичну прогресію. В цій прогресії: $a_1 = 15, d = 15, a_n = 3 \cdot 60 + 45 = 1845$ (потрібно перевести часи в хвилини). За умовою необхідно знайти n. Для цього допоможе формула: $a_n = a_1 + (n-1)d$.
5. **Б.** *Пояснення:* $\frac{c^2+25}{(c-5)(c+5)} - \frac{c(c-5}{c+5} = \frac{c^2+25-c^2+5c}{(c-5)(c+5)} = \frac{5(c+5)}{(c-5)(c+5)} = \frac{5}{c-5}$.
6. **А.** *Пояснення:* помножимо обидві частини рівняння на 2 та скористаємось формулою для синуса подвійного кута: $2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$. Або: $\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{3}$. Однак $\sqrt{3} > 1$. А синус не може приймати значення більші за 1. Отже, це рівняння коренів немає.
7. **В.** *Пояснення:* екстремум – це точка, у який похідна функції змінює свій знак. На цьому графіку є 3 нулі похідної, але у другій точці похідна не змінює свій знак, залишаючись від'ємною. Отже, функція має лише два екстремуми.
8. **Б.** *Пояснення:* 1) **вірне твердження**; 2) в темі «Стереометрія» за діаграмою Марія отримала 20% гарних оцінок, а 2 з 20 – це 10% - **невірне твердження**; 3) кількість оцінок повинна бути цілою. Якщо Марія отримала за тему «Прогресії» 15 оцінок, то гарних з них повинно бути 15% - неціле число – **невірне твердження**; 4) середнє арифметичне дорівнює загальний сумі відсотків поділити на кількість тем – 26,875% - **невірне твердження**; 5) однакова кількість відсотків не означає однакову кількість оцінок – **невірне твердження**.
9. **Г.** *Пояснення:* це квадратична нерівність: потрібно перенести всі доданки з правої частини вліво, та знайти корені відповідного квадратного рівняння: $x^2 - x - 2 \leq 0$, $x_1 = -1, x_2 = 2$. Після цього потрібно намалювати «змійку» та заштрихувати відповідний проміжок (в даній нерівності – із знаком «$-$»).
10. **А.** *Пояснення:* площа основи – це площа круга, тому радіус основи циліндра, а, отже, і конуса, дорівнює: $36\pi = \pi R^2 \Rightarrow R = 6$. Оскільки висота конуса дорівнює 8, то твірна, яка є гіпотенузою відповідного прямокутного трикутника, дорівнює 10. Отже площа бічної поверхні конуса: $\pi Rl = 60\pi$.
11. **Д.** *Пояснення:* потрібно підставляти в рівняння графіків функцій дві контрольні точці: $(1;1), (2;2)$. Координати обох точок підходять лише для останньої функції.
12. **Б.** *Пояснення:* помножимо обидві частини рівняння на 12, отримаємо: $4x - 20 + 4 - 2x = 4 + 5x$. $x = -\frac{20}{3} = -6\frac{2}{3}$.
13. **Б.** *Пояснення:* вектори колінеарні, якщо їх відповідні координати пропорційні, тобто: $\frac{k^2-1}{3} = \frac{k+1}{-1} = \frac{3}{3} = 1$. Розв'язуючи цю пропорцію. Дістанемо один корінь: $k = -2$.
14. **В.** *Пояснення:* можна скористатися наступною формулою для площі трикутника: $S = \frac{1}{2}absin\gamma$. Оскільки: $S_{MBK} = \frac{1}{2}MB \cdot BK \cdot sin\angle B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{3}BC \cdot sin\angle B = \frac{1}{6} \cdot$

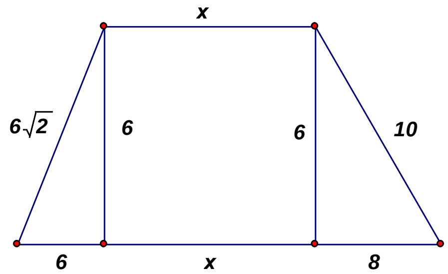
$\frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot sin\angle B = \frac{1}{6}S_{ABC}$, то площа трикутника ΔABC в 6 раз більша за площу трикутника ΔMBK.

15. Г. *Пояснення:* в даному випадку ОДЗ функції складається з двох частин: $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2-9 \neq 0 \end{cases}$. Або: $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq \pm 3 \end{cases}$. Звідси $x > 3$.

16. Г. *Пояснення:* твердження **А** невірне (для паралельності площин необхідно, щоб дві **непаралельні** прямі однієї площини були паралельні двом прямим іншої площини). Твердження **Б** також невірне – достатньо взяти дві горизонтальні площини, в одній вибрати пряму, яка йде зліва направо, а, в іншій – пряму, яка йде від нас – ці прямі будуть перпендикулярні. Твердження **В** невірне. Для цього достатньо розглянути стінку та підлогу у будь-якій кімнаті: якщо взяти пряму, яка утворюється при перетині стінки і стелі та пряму, яка утворюється при перетині протилежної стінки і підлоги, то ці прямі паралельні, незважаючи на те, що лежать у перпендикулярних площинах. Твердження **Г** – вірне. Твердження **Д** – дивись приклад для твердження **В**.

17. Б. *Пояснення:* зведемо обидва степеня до основи 2: $2^{-(x-3)} = 2^{-2 \cdot \frac{2x-4}{3}}$. Звідси прирівнюємо показники степенів: $3 - x = \frac{8-4x}{3} \Rightarrow x = -1$.

18. В. *Пояснення:* для розв'язання цієї задачі потрібно згадати, що в описаній трапеції висота дорівнює діаметру вписаного кола. Тобто висота трапеції дорівнює 6. Знаючи, бічні сторони, з прямокутних трикутників можна знайти відрізки, які відтинають висоти трапеції, проведені з вершин меншої основи, від більшої основи.



Залишилось скористатися властивістю описаного чотирикутника: суми протилежних сторін рівні: $2x + 14 = 10 + 6\sqrt{2}$.

19. А. *Пояснення:* об'єм піраміди дорівнює: $V = \frac{1}{3}Sh$, де: S – площа основи. Звідси можна знайти площу основи: $S = 27\sqrt{3}$. Оскільки площа правильного трикутника обчислюється по формулі: $S = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$, то сторона трикутника буде дорівнювати: $a = 6\sqrt{3}$. Апофема утворює прямокутний трикутник разом із висотою піраміди та радіусом вписаного кола основи: $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = 3$. Тоді з прямокутного трикутника апофема дорівнює 5.

20. Д. *Пояснення:* нерівність $f(x)g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$. Тобто, необхідно знайти ті проміжки, на яких обидві функції мають однаковий знак, та точки, у яких хоча б одна з функцій дорівнює 0. З графіка отримуємо наступні розв'язки: $(-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [2; 4]$.

21. 1 – Г, 2 – В, 3 – А, 4 – Б. *Пояснення:* **1** – це графік косинуса, а завдяки формулі зведення: $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-cosx$; **2** – це звичайна синусоїда; **3** – це графік синуса, який розтягнули в 4 рази від осі Ox, тобто функцію потрібно помножити на 4; **4** – це графік синуса, який стисли в 4 рази до осі Oy, тобто аргумент функції потрібно помножити на 4.

22. 1 – Д, 2 – В, 3 – А, 4 – Г. *Пояснення:*

1 $\frac{log_a 12+log_a 3}{log_a 12}+log_{12}4=\frac{log_a 36}{log_a 12}+log_{12}4=log_{12}36+log_{12}4=log_{12}144=2.$

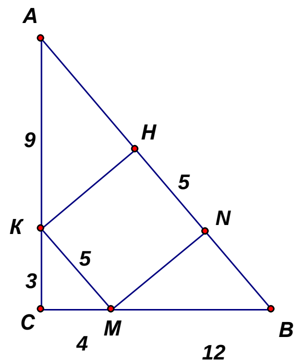
2 $ctg^2\pi a(sin^2\pi a+cos^2\pi a)+1=ctg^2\pi a+1=\frac{1}{sin^2\pi a}=\frac{1}{sin^2\frac{\pi}{2}}=1.$

3 $\left(\frac{1}{a^2-9}-\frac{1}{a^2-6a+9}\right)\cdot\frac{a(a-3)^2}{6}+\frac{9}{a^2+3a}=\left(\frac{a-3-a-3}{(a-3)^2(a+3)}\right)\cdot\frac{a(a-3)^2}{6}+\frac{9}{a^2+3a}=\frac{-a}{a+3}+\frac{9}{a(a+3)}=\frac{9-a^2}{a(a+3)}=\frac{3-a}{a}=\frac{2{,}5}{0{,}5}=5.$

4 $\sqrt{1-4a+4a^2}-\sqrt{9a^2-24a+16}=|1-2a|-|3a-4|=|0|-|-2{,}5|=-2{,}5$

23. 1 – В, 2 – Д, 3 – Б, 4 – А. *Пояснення:* точка B лежить у площині xOy; точка K є центром грані, тому по осям Oy, Oz здвигнута лише на 1; точка D – центр описаної навколо куба сфери, тобто центр куба, а тому здвигнута по всім осям на 1; точка C_1 має координати $(2;0;2)$, а тому точка, яка є симетричною до неї відносно початку координат матиме ті ж самі координати, але з протилежним знаком.

24. 1 – А, 2 – Д, 3 – Г, 4 – Б. *Пояснення:*



Площа трикутника CKM дорівнює 6 см^2, площа трикутника ABC дорівнює 96 см^2, тому площа трапеції $MKAB$ (це трапеція за теоремою Фалеса для відрізків KM, AB) дорівнює $96-6=90$ см^2. Оскільки площа трапеції обчислюється за формулою: $S=\frac{a+b}{2}h$, то можемо знайти висоту трапеції, тобто: $KH=MN=7{,}2$ см. Звідси знаходимо довжини відрізків NB, AH та всі необхідні площі.

25. 22. *Пояснення:* позначимо через x – кількість хвилин, яку Сашко витрачає на одну гру в настільний футбол, а через y – кількість хвилин, яку він витрачає на написання 1 конспекту. Тоді отримуємо систему рівнянь: $\begin{cases}6x+y=60\\2x+2y=60\end{cases}$. Звідси $x=6$, $y=24$. У тижні 7 днів, тобто на всі ці справи у Сашка було 7 годин. Дві з них він витратив на проводжання Ані, тому на написання конспектів та гру у футбол у нього залишилося 5 годин, або 300 хвилин. З них він витратив на написання конспектів $7\cdot 24=168$ хвилин. Отже на настільний футбол у нього залишилось $300-168=132$ хвилини. На оду партію витрачається 6 хвилин, отже партій було зіграно $132:6=22$.

26. 0,5. *Пояснення:* в першому завданні у Ярослави ймовірність вгадати і не вгадати рівна 0,5, адже вона вибирає з двох варіантів. У другому завданні ймовірність вгадати дорівнює 0,25, а не вгадати - 0,75, адже Ярослава вибирає з 4 варіантів. Отже, ймовірність, що Ярослава вгадає тільки перше завдання: $0{,}5\cdot 0{,}75$, а ймовірність, що вгадає тільки друге завдання: $0{,}5\cdot 0{,}25$. Загальна ймовірність дорівнює сумі двох ймовірностей.

27. 2. *Пояснення:* $\begin{cases} log_3(2x-1) \le 2 \\ \sqrt{2x-5} \ge \sqrt{3x-12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2x-1 \le 9 \\ 2x-5 \ge 3x-12 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5 < x \le 5 \\ 4 \le x \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow$ $4 \le x \le 5$.

28. 4. *Пояснення:* для початку треба знайти точки перетину ліній: $x+3 = x^2+bx+3$. Звідки $x_1 = 1-b, x_2 = 0$. Те, що точка 0 лежить справа від точки $1-b$ видно з рисунку (через те, що $b > 0$ вершина параболи лежить зліва від осі Oy). Після цього: $\int_{1-b}^{0}(-x^2+(1-b)x)dx = 4,5$. Звідси отримуємо рівняння: $\frac{(1-b)^3}{3} - \frac{(1-b)^3}{2} = 4,5$. Тоді: $(1-b)^3 = -27$.

29. 24. *Пояснення:* скористаємось властивістю бісектриси трикутника: вона ділить протилежну сторону на відрізки, які пропорційні бічним сторонам. Отже: $AB = 3x, AC = 6x$. Запишемо теорему косинусів: $9x^2 + 36x^2 - 2 \cdot 3x \cdot 6x \cdot cos60^0 = 81$. Звідси: $x = \sqrt{3}$. Тоді периметр трикутника: $P = 9\sqrt{3} + 9 \approx 9 \cdot 1,7 + 9 \approx 24,3 \approx 24$.

30. 9. *Пояснення:* проведемо $DM \perp AB$, M – середина AB, так як трикутник ADB – рівнобічний. Тоді: $DM = \sqrt{49-16} = \sqrt{33}$. З іншого боку: CM – висота рівностороннього трикутника ABC, тобто: $CM = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. За умовою грані ADB та ABC перпендикулярні, отже, DMC – прямокутний трикутник. Звідки: $DC = \sqrt{33+48} = 9$.

31. $-0,96$. *Пояснення:* $tg\alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha} = \frac{25}{16}$. Отже, $cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$. Аналогічно: $sin\alpha = \pm\frac{3}{5}$. Отримуємо: $sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha = \pm 0,96$. Знак визначаємо з наступних міркувань: тангенс – це відношення синуса до косинуса. За умовою, тангенс – від'ємний. Отже, синус і косинус протилежних знаків. Отже, і синус подвійного кута теж від'ємний.

32. $0,25$. *Пояснення:* $\frac{(\sqrt{2})^{1,6} \cdot 4^{-3,2}}{(0,25)^{1,8}} = \frac{2^{\frac{1,6}{2}} \cdot 2^{2\cdot(-3,2)}}{(\frac{1}{4})^{1,8}} = \frac{2^{0,8} \cdot 2^{-6,4}}{2^{-3,6}} = 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0,25$.

33. 100. *Пояснення:* випишемо ОДЗ цього рівняння: $x > -a$. Після цього скористаємось основною логарифмічною тотожністю та перетворимо праву частину рівняння: $x - 3 = \sqrt{x+a}$. Тепер можемо піднести обидві частини рівняння у квадрат. При цьому зауважимо, що $x \ge 3$. Отримаємо квадратне рівняння: $x^2 - 7x + (9-a) = 0$. Для того, щоб початкове рівняння мало два різні кореня, отримане квадратне рівняння теж повинно мати два різні кореня. Для цього дискримінант даного рівняння повинен бути додатнім. Отже: $49 - 4(9-a) > 0$. Або: $a > -\frac{13}{4} = -3,25$. Тепер випишемо корені рівняння: $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{13+4a}}{2}$. Залишилось перевірити наступні умови: $\begin{cases} x_{1,2} \ge 3 \\ x_{1,2} > -a \end{cases}$. Зауважимо, що для того, щоб ці умови виконувалися достатньо, щоб вони виконувалися для меншого кореня. Розв'яжемо наступну систему нерівностей: $\begin{cases} \frac{7-\sqrt{13+4a}}{2} \ge 3 \\ \frac{7-\sqrt{13+4a}}{2} > -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - \sqrt{13+4a} \ge 6 \\ 7 - \sqrt{13+4a} > -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{13+4a} \le 1 \\ \sqrt{13+4a} < 7+2a \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \sqrt{13+4a} \le 1 \\ \sqrt{13+4a} < 7+2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13+4a \le 1 \\ 13+4a < 49+28a+4a^2 \\ 7+2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le -3 \\ 0 < 36+24a+4a^2 \\ a > -3,5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a \le -3 \\ a^2+6a+9 > 0 \\ a > -3,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le -3 \\ a \ne -3 \\ a > -3,5 \end{cases} \Leftrightarrow -3,5 < a < -3$. Враховуючи, що $a > -3,25$, отримуємо відповідь: $-3,25 < a < -3$. До цього інтервалу не входить жодного цілого числа, тому у відповідь пишемо 100.