Пояснення до завдань з МАТЕМАТИКИ пробного тестування «ЗІГЗАГ»-2012 (без тем 11 класу)

1. **А**
Десять подруг, які складають по 3 предмети, кожен з яких коштує 50 грн, заплатять загалом 1500 грн. Винагорода складає 60 грн. Необхідно скласти пропорцію, узявши в якості $100\% - 1500$ грн, а $x\% - 60$ грн.

2. **Д**
Загальний вигляд розв'язків даного рівняння: $2x+\frac{\pi}{3}=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\epsilon Z$. Звідси нескладно отримати, що: $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}, k\epsilon Z$. Залишилось порахувати – скільки з цих коренів потрапить у зазначений проміжок. Підставляючи по черзі цілі значення k (доки корні не вийдуть за зазначений проміжок) $(0,-1,1,-2,2\ldots)$, отримуємо, що це будуть корні: $-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{4};\frac{11\pi}{12};\frac{5\pi}{4}$.

3. **Д**
Необхідно пам'ятати, що для того, щоб розділити на дріб, необхідно його перевернути та на нього помножити. Після цього залишиться скоротити, згадавши, що при діленні показники степенів віднімаються, а не діляться, а при множенні додаються, а не множаться.

4. **Г**
Для того, щоб порівнювати корні, необхідно привести їх до однакового степеня. Тоді: $\sqrt[3]{6}=\sqrt[12]{6^4}; \sqrt[4]{10}=\sqrt[12]{10^3}; \sqrt[6]{32}=\sqrt[12]{32^2}$. Оскільки корінь – зростаюча функція, то, чим більше вираз під коренем, тим більше значення самого кореня. Звідси вже нескладно отримати правильну відповідь.

5. **В**
Точка $(2x,x)$ належить прямій $y=\frac{x}{2}$. Це означає, що вона належить графіку функції, якщо ця функція перетинається із графіком зазначеної прямої. Намалювавши графік прямої, можна побачити, що вона перетне графік функції у 2 точках.

6. **В**
Звісно, це завдання можна розв'язати методом підбирання. Однак більш правильним і надійним буде розв'язок із використанням арифметичної прогресії. Легко побачити, що кількість хвилин, які Тетяна дивиться кожної неділі – це члени арифметичної прогресії із $a_1=10; d=5$. Нам потрібно знайти n, при якому: $a_n=90$. Використавши формулу $a_n=a_1+(n-1)d$, знаходимо, що $n=17$.

7. **Б**
Вектори перпендикулярні, якщо їх скалярний добуток дорівнює 0. Скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків їх координат: $\vec{a}\vec{b}=2b+(-2)(-3)=2b+6$. Прирівнявши даний вираз до 0, отримаємо правильну відповідь.

8. **В**
Можна просто намалювати обидва графіки в одній системі координат та знайти відповідь. А можна згадати формулу: $cosx=\sin(\frac{\pi}{2}+x)$. Тобто синусоїду треба перемістити вліво на $\frac{\pi}{2}$, а, отже, вісі координат потрібно переміщати в протилежну сторону на таку саму відстань.

9. **Д**
Графік непарної функції симетричний відносно початку координат, а графік парної – відносно вісі Oy. Отже, з перших двох властивостей виконується тільки (1). Властивість (3), очевидно, невірна. А ось властивості (4),(5) – вірні (адже функція немає спільних точок із віссю абсцис, а невизначена лише у точці 0).

10. В

Дана нерівність розв'язується методом інтервалів. Спочатку потрібно розкласти тричлен у знаменнику на множники за допомогою наслідку з теореми Вієта:$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Тоді нерівність виглядає як: $\frac{(x-3)^2(x+2)}{x^3(x-2)(x+1)} \leq 0$. Далі потрібно намалювати числову вісь, відмітити на ній нулі усіх скобок: $-2, -1, 0, 2, 3$. При цьому нулі знаменника потрібно «виколоти». Далі малюється «змійка», яка починається справа зверху, та міняє знак у всіх точках, окрім 3 (адже відповідна степінь – парна). У результаті отримуємо розв'язок нерівності: $[-2; -1) \cup (0; 2) \cup \{3\}$. Серед цих розв'язків лише два натуральних: 1 та 3.

11. Д

Якщо кількість магазинів $2x$ (а вона повинна ділитися на 2, адже в умові йдеться про половину кількості магазинів), то Аня переміряє $3x + 7x = 10x$ суконь. Отже, кількість переміряних суконь повинна ділитися на 10.

12. Д

Ця система має безліч розв'язків, адже коефіцієнти при всіх змінних та вільні коефіцієнти в обох рівняннях пропорційні.

13. Г

Таке дивне значення аргументу повинно наштовхувати на думку, що значення виразу не залежить від змінної. Застосуємо наступні перетворення. $\frac{1+sin\,2\alpha}{sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)} = \frac{1+2sin\,\alpha cos\alpha}{(sin\frac{\pi}{4}cos\alpha + cos\frac{\pi}{4}sin\alpha\,)^2} = \frac{1+2sin\alpha cos\alpha}{\frac{1}{2}(cos^2\alpha+sin^2\alpha+2sin\alpha cos\alpha\,)} = 2$.

14. Г

Добуток дорівнює 0 тільки тоді, коли один з множників дорівнює 0. Прирівнявши усі множники рівняння до 0, отримаємо корені $-6, -4, 0, 3$. З цих чотирьох коренів лише один не увійде в ОДЗ рівняння ($x \geq -4$) – це корінь -6.

15. Д

Скориставшись правилом пропорції, отримаємо рівність: $pVM = mRT$, звідки легко отримати формулу: $M = \frac{mRT}{pV}$.

16. В

Твердження **А** невірне (в якості прикладу достатньо взяти квадрат і ромб із сторонами 5 – усі сторони рівні, а чотирикутники – різні). Твердження **Б** також невірне, адже такий чотирикутник може бути дельтоїдом (наприклад, $AB = BC; CD = AD; \angle A = \angle C; AC \perp BD$). Твердження **В** – вірне: нехай у чотирикутнику $ABCD$ цей центр – точка O. Тоді: AO, BP, CO, DO – бісектриси кутів (адже це центр вписаного кола) та одночасно радіуси описаного кола. Тобто усі ці відрізки рівні. Отримуємо чотири рівнобедрених трикутники із однаковими бічними сторонами (AOB, BOC, COD, AOD), у яких ще й однакові висоти (радіуси вписаного кола). Отже, ці трикутники рівні, значить, у чотирикутника рівні сторони, тобто це – ромб. А ромб, навколо якого модна описати коло – це квадрат. Твердження **Г** – дві рівні сторони можуть бути, наприклад, у рівнобедреної трапеції. Твердження **Д** – таким чотирикутником може бути, наприклад, прямокутна трапеція.

17. В

Оскільки центр описаного кола лежить на більшій основі, то вона є діаметром, а, отже, дорівнює 10. Якщо менша основа трапеції BC, центр кола – O, то $BO = OC = 5$, тобто BOC – рівнобедрений трикутник із висотою $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. Нескладно отримати, що такий трикутник є рівностороннім. Звідси, менша основа дорівнює 5, а середня лінія - 7,5.

18. Б

Проведемо ще дві середніх лінії - MT, NT, де T – середина сторони АС. Тоді з властивостей середніх ліній можна отримати наступні рівності трикутників: $AMK = TNP; KMT = PNC; MBN = NTM$. Звідси випливає, що замальований прямокутник складає половину від трикутника. Отже, його площа дорівнює 8.

19. Б

Твердження (1), (2) вірні (з означення та властивостей прямих). Твердження (3) невірне, адже через точку, що не належить площині, можна провести площину, яка паралельна даній, в якій будь-яка пряма, що проходить через цю точку, буде паралельна даній площині. Твердження (4) вірне, незважаючи на те – належать ці точки одній прямій чи ні. Твердження (5) невірне, - достатньо провести мимобіжну до даної пряму та обрати на ній дві точки. Твердження (6) невірне, адже ці три точки можуть лежати на одній прямій, і тоді умова не є обов'язковою.

20. В

Площа стін кімнати Каті дорівнює: $2 \cdot (3 \cdot 4 + 3 \cdot 5) = 54$ м^2. Треба відняти площу вікна ($2 \cdot 1{,}5 = 3$ м^2) та дверей ($0{,}6 \cdot 2 = 1{,}2$ м^2). Тобто, треба пофарбувати $49{,}8$ м^2. Враховуючи, що на кожний квадратний метр іде 0,4 кг, отримуємо загальну необхідну кількість фарби: $49{,}8 \cdot 0{,}4 = 19{,}92$ кг.

21. 1 – Г, 2 – Б, 3 – А, 4 – В

1– $y = \sqrt[k]{x}$ – оскільки функція визначена лише при додатних x, то k може бути лише парним; **2** – оскільки гіпербола лежить у II та IV четвертях, то k повинен бути від'ємним; **3** – точка перетину параболи з віссю Oy лежить над віссю Ox, значить, вільний коефіцієнт повинен бути додатнім. Таким чином, $k > \frac{1}{2}$. Крім того, вершина параболи має від'ємну абсцису, тому, враховуючи формулу: $x_в = -\frac{b}{2a}, x_в < 0, a < 0 \Rightarrow b < 0 \Rightarrow -(k-2) < 0 \Rightarrow k > 2$. Звідси отримуємо єдиний можливий варіант: $k = 3$; **4** – пряма, яка паралельна осі абсцис має рівняння: $y = b \Rightarrow k = 0$.

22. 1 – Г, 2 – Б, 3 – А, 4 – В

1 $\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{4\sqrt{a}}{a-1}\right) : \frac{\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}} = \left(\frac{(\sqrt{a}+1)^2-4\sqrt{a}}{a-1}\right) : \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} = \left(\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}-1} = \sqrt{a}$.

2 $\frac{a^{\frac{5}{6}} \cdot a^{-2}}{(a^{\frac{4}{3}})^{-\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{5}{6}-2}}{a^{\frac{4}{3}\cdot(-\frac{1}{2})}} = \frac{a^{-\frac{7}{6}}}{a^{-\frac{4}{6}}} = a^{-\frac{3}{6}} = a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

3 $\frac{a}{a+2} - \frac{(a-2)^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{a^2-4} + \frac{1}{a^2-4a+4}\right) = \frac{a}{a+2} - \frac{(a-2)^2}{2} \cdot \left(\frac{a-2+a+2}{(a+2)(a-2)^2}\right) = \frac{a}{a+2} - \frac{a}{a+2} = 0$.

4 $\frac{sin\pi a}{cos\pi a}\left(\frac{1}{sin^2\pi a} - 1\right) = tg\pi a(1 + ctg^2\pi a - 1) = tg\pi a \cdot ctg^2\pi a = ctg\pi a = ctg\frac{9\pi}{4} = 1$

23. 1 – Б, 2 – Д, 3 – Г, 4 – В

Тетраедр – це трикутна піраміда, яка має 4 вершини та стільки ж граней, які є трикутниками; паралелепіпед – чотирикутна призма, яка має 8 вершин та 6 граней; шестикутна призма має 8 граней та 12 вершин; чотирикутна піраміда має 5 граней та 5 вершин.

24. 1 – А, 2 – Д, 3 – Г, 4 – Б

Радіус вписаного кола – це висота трикутника BOC з кутом $OCB = 30^0$. Скориставшись властивістю катета, що лежить напроти кута 30^0, отримаємо: $BO = 6$ см. Звідси, через тригонометричний зв'язок катета і гіпотенузи трикутника BOC, отримаємо: $\frac{BO}{BC} = sin60^0 \Rightarrow BC = 4\sqrt{3}$ см. З властивостей ромба: $AB = 4\sqrt{3}$ см, $BD = 12$ см. Радіус описаного навколо прямокутного трикутника BOC кола – це половина гіпотенузи BC, тобто: $R = 2\sqrt{3}$ см. Трикутник BCD: кут $BDC = 30^0 \Rightarrow BH = \frac{1}{2}BD = 6$ см.

25. 24

Якщо позначити за x – кількість годин, які необхідні Station Станіславу, то Сашкові знадобилося б $(x-3)$ години. За одну годину Станіслав може зорати $\frac{1}{x}$ частину ділянки, а Сашко - $\frac{1}{x-3}$. Оскільки Станіслав загалом пропрацював 16 годин, а Сашко – 7, то рівняння задачі буде таким: $\frac{16}{x} + \frac{7}{x-3} = 1$. Розв'язуючи це рівняння, отримаємо два кореня – 2 та 24 години. Однак 2 години, очевидно, не є відповіддю даної задачі.

26. 23

Піднесемо обидві частини рівняння в квадрат, після скорочення та зведення подібних отримаємо таке рівняння: $\sqrt{8x^2-7} = 3x - 4 \Leftrightarrow 8x^2 - 7 = 9x^2 - 24x + 16 \Leftrightarrow x^2 -$

$24x+23=0$. Це рівняння має два корені: 1 та 23. Зробивши перевірку, переконуємось, що 1 не підходить.

27. $\mathbf{-3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{xy} = -\frac{8}{3} \\ y = \frac{3x+13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-3y^2=-8xy \\ y=\frac{3x+13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-\frac{3}{16}(9x^2+78x+169) = -6x^2-26x \\ y=\frac{3x+13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 117x^2+182x-507=0 \\ y=\frac{3x+13}{4} \end{cases}$. Далі, поділивши перше рівняння на 13 та розв'язавши його, отримаємо два корені: $x_1=\frac{13}{9}, x_2=-3$. Звідси знаходимо: $y_1=\frac{13}{3}, y_2=1$. Найменшим буде від'ємний добуток.

28. $\mathbf{1,5}$

$\frac{4x-4}{x}+\frac{x^2+4}{x^2+x}=\frac{6+x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{4x-4}{x}+\frac{x^2+4}{x(x+1)}=\frac{6+x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{4x^2-4+x^2+4}{x(x+1)}=\frac{6x+x^2}{x(x+1)}$. Врахувавши ОДЗ ($x \neq 0; -1$), можна відкинути знаменники, прирівнявши чисельники. Отримаємо квадратне рівняння із коренями 0; 1,5. Перший корінь не входить в ОДЗ.

29. 54

Оскільки A_1B_1 – середня лінія трикутника, то $A_1B_1=\frac{1}{2}AB=5$. Крім того, скористаємось теоремою Архімеда: медіани в точці перетину діляться у відношенні $2:1$, рахуючи від вершини. Тому: $MB_1=\frac{1}{2}MB=4$. Розглянувши трикутник MA_1B_1, бачимо: $MA_1^2+MB_1^2=A_1B_1^2$. Тому трикутник цей – прямокутний. Тому в чотирикутнику ABA_1B_1 діагоналі перпендикулярні. Тепер скористаємось формулою для площі чотирикутника через добуток його діагоналей: $S=\frac{1}{2}d_1d_2 sin\varphi$. Оскільки кут між діагоналями є прямим, то площа дорівнює половині добутку довжин діагоналей. З теореми Архімеда можна отримати, що $BB_1=12; AA_1=9$. Тому площа дорівнює: $S=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 9=54$.

30. 10

$AM \perp BC$, M – середина BC. Трикутники ABH та BAM – прямокутні, у них спільна гіпотенуза, а катети рівні за умовою. Отже, вони рівні. З цього випливає, що $BM=AH=5$ см. Оскільки M – середина BC, то $BC=2BM=10$ см.

31. 2

$\left|\sqrt{a+2}-a\right|=\sqrt{a+2}-a$: для того, щоб виконувалась ця рівність, необхідно, щоб вираз під модулем був невід'ємним. Тобто, необхідно розв'язати нерівність $\sqrt{a+2}-a\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a+2}\geq a$. Ця нерівність (без урахування ОДЗ) рівносильна сукупності: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 0 \\ a+2\geq a^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ a - \text{будь} - \text{яке} \end{cases} \end{array}\right.$. Розв'язуючи цю сукупність, отримаємо: $a\in(-\infty;2]$. Врахувавши ОДЗ: $a\in[-2;2]$.

32. 1

Ліва частина може бути представлена у вигляді: $x^2-2x+3=(x-1)^2+2\geq 2$. Права ж частина, якщо врахувати, що корінь парного степеня завжди невід'ємний, завжди не більша за 2. Тобто, рівність можлива лише тоді, коли обидві частини рівні 2. Ліва частина рівна 2 тільки при $x=1$. Якщо підставити це значення змінної у праву частину, то переконаємося, що це і є корінь.